

BEDTACI.ELTE

Berezvai Dániel

Írtam 2011. október 13-án.

Teljes ráfordított idő: 45 perc (+1 hétnyi fejtörés)

$f \circ f \circ f = f$

Ennek megoldása az összes involúció és az összes önelnyelő függvény. Van-e más megoldás?

Matematikailag: $f \circ f \circ f = f \Rightarrow f \circ f = f \wedge f = f^{-1}$

Megjegyzés: Legalább háromelemű halmazokkal kell dolgoznom, mert minden kételemű halmaz önmagába képezve vagy involúció vagy önelnyelő lesz.

Igaz-e a fenti implikáció minden f -re?

Az implikáció cáfolásához olyan funkciót keresek, amely vagy nem involúció, vagy nem önelnyelő, de $f \circ f \circ f$ mégis egyenlő f -fel.

Már egy hete gondolkodom rajta, de egy ilyen függvény se jut eszembe. Megérzés: Nincs ilyen függvény.*

Tehát bizonyítani kellene az implikációt. $f \circ f \circ f = f \Rightarrow f \circ f = f \wedge f = f^{-1}$

Új ötlet:

$f: A \rightarrow A$ ($A \in \mathbb{N}$, $\forall a \in A: a \geq 4$) (Hogy kettes számrendszerben legalább három számjegye legyen. $100_2 = 4_{10}$)

$f =$ "A szám kettes számrendszerbeli utolsó három számjegyének eggyel balra küldése."

$X =$ az összes többi számjegy

$a =$ hátulról a harmadik számjegy

$b =$ hátulról a második számjegy

$c =$ az utolsó számjegy

$Xabc \Rightarrow Xbca \Rightarrow Xcab \Rightarrow Xabc$

Példa 13_{10} ($= 1101_2$)-re:

$f(1101_2) = 1011_2$

$$f(1011_2)=1110_2$$

$$f(1110_2)=1101_2$$

Ez nem involúció, mert $f(Xabc)=Xbca$, de $f^{-1}(Xabc)=Xcab$ (bal helyett jobbra küldés)

Ez nem önelnyelő, mert $f(Xabc)=Xbca$, de $f(f(Xabc))=Xcab$ (kétszer balra küldés nem elég önelnyeléshez, háromszor viszont önmaga lesz.)

* Tehát mégis van ilyen függvény!

Ez mégsem jó, figyelmen kívül hagytam a jobb oldalt. Nem x -szel, hanem $f(x)$ -szel kellene, hogy egyenlő legyen.

3/10 pontot kaptam a próbálkozásra.

Update: Továbbá nem is szűkítettem az olyan számokra, melyeknek kettes számrendszerben nem egyforma az utolsó 3 számjegyük. Pl.: $4_{10} = 100_2$, de 12_{10} is 100_2 -re végződik ($12 = 1100_2$). Az egyformán végződő számokra a függvény involúció és önelnyelő.

A félreértelmezett összefüggés: $f(f(f(x)))=x$. (Jobb oldalon $f(x)$ kellett volna, hogy álljon.)